『円理弧背綴術』の著者について : 兼庭撰と関連して (数学史の研究)

内田, 孝俊

数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 210-222

『圓理弧背綴術』の著者について － 兼庭撰と関連して

内田　孝俊(Takatoshi UCHIDA)

0．緒言

『圓理弧背術』あるいは『圓理綴術』という書名の写本があるが、これらは全く内容が同一であって 、本稿の参考文献としては『圓理綴術』が多いので、以下『圓理綴術』としておく。ところで、この写本の何れも巻首尾誌語ともに本多利明誌となっている。今井兼庭も同題名の著述をしており、幸いにも本多利明自筆の写本が、両方（不休撰[林911]、兼庭撰[林913]）にある。そこでこの２本を底本とするが、この写本は他の写本と違った特徴がある。特に、表題に挙げた書名のように、共に『円理弧背綴術』となっており、不休撰には、他にはない内題名があって、「円理弧背術解　全」となっている。[1)]

そして、重大なポイントとなるが、「不休撰」を２つの部分に分けて考えたい。それを仮に、＜前編＞と＜後編＞とする。（略して、＜前＞,＜後＞)。 ＜前＞は半背巾、＜後＞は定背巾の展開式（級数形）を求める違いに留まらず、＜後＞に考え方の重大なミスがあると、思うからである。また、兼庭撰は、後の方は、径矢弦、弧積等間の関係を求める例題と捕らえられることから、これも、＜前編＞と＜後編＞に分けたい。（ここでは、本稿の趣旨から＜後＞は採りあげない。）

ところで、本多の誌語であるが、誰が見ても直ちに巻首尾に根本的な違いがある、ことに気づく。遠藤利貞は写本にそのことを書き添えてあり（[院0838]。それをそのまま、つけ加えて、清書した写本［林912]もある。）巻首尾に共通した『円理綴術』の継承から、(これも不明な点があるかもしれないが)今は誌語通り、利明は兼庭から受け継いだものとして考え、この不休撰と兼庭撰を採り上げた。

ところで、本表題の「・・・の著者について」とある著者を特定したわけではなく、建部賢弘の著作にしては、おかしいと思われる所があるので、（賢弘でも絶対間違わないと言いきれないだろうが）内容の概要を記して、ご批判を仰ぎたいと思ったわけなのである。

そこで、巻首尾誌語を記し、次の節から Ⅰ．Ⅱ．Ⅲ．節として、不休撰の＜前編＞、＜後編＞ そして 兼庭撰の ＜前編＞ のそれぞれの内容の概要を書き、ミスを指摘しつつ最後に Ⅳ.節 結語として、その違いの部分の大略を比較してみたいと思うのである。

先ず、巻首尾誌語を挙げておく。

- 巻首誌語
  此書ハ関孝和先生ノ遺書ニシテ関流一派ノ長器ナリ曽テ延宝年間ニ関家絶滅其後先生生ノ高弟タル建部家ノ屬客タリ建部生ト倶ニ謀テ此円理弧背密法ヲ造製シテ名ヲ綴術ト云而コレヲ門弟子ニ授ク余ガ師今井兼庭コレ(*ママ)得テ後又コレヲ余ニ授ク以テ鴻寶トス文化五戊辰年五月望　　　魯鈍斎利明誌 三十六方位盤 の印
- 巻尾誌語
  此書、建部不休先生之製作也、其向授時暦之起源詳解 并起、日躔部之六巻状、撰者之時、製作円周率之密法、而秘蔵於殊者乃此書也、余 師兼庭授之復重寶矣、余 再授之、而為至實至寶秘蔵焉、本多利明謹誌印

Ⅰ．不休撰 ＜前編＞ の内容の概要

『圓理弧背綴術』の写本の内容としての構成上、見逃すことのできない保管状況から述べる。本体は濃紺のクロス張りの厚紙に挟まれて紐で結ばれている。このクロス張りを開くと裏側のひだり（クロス張りの裏表紙の内側）に、いま時の茶封筒が貼りつけされて、その中に縁のボサボサした和紙が入っている。この和紙に前述の巻首誌語と称される文が書かれていて、末尾に三十六方位盤の朱印が押され、更に、改行して上部に、大きく円理綴術と書かれているのである。従ってこの別紙は、本多が書いたものと見てよく、本文には綴じられていないのである。[2)]

Ⅰ－1．開方式

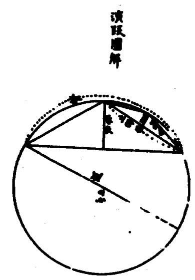
さて、本体であるが、三十六方位盤の朱印の一丁後から、文頭題名があって本文が始まる。

圓理弧背術　名曰綴術　　　　　不休先生撰 利明之印

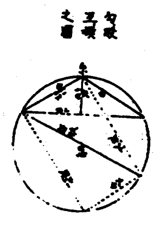
弧形トハ圓欽ヲ云ナリ。中閪ヲ矢ト曰。下ノ長ヲ弦ト曰。上ノ灣ヲ背ト曰。求之術弧形ノ内ニ數万斜ヲ容レ。其斜弦ヲ鉤トシ。傍弦ヲ股トシ。全圓徑ヲ弦トス。是ヲ以テ矩トシテ。依句股互換之術各矢ヲ求テ。全徑及各其半斜數冪ヲ相乗シテ各々汎半冪トシ。諸差ノ極限ヲ探会シテ。定半背冪ヲ得テ。諸差ノ例ヲ探索シテ設本術也。

以上は、定半背冪を求める方法を順に説明し、その間の図形について必要な用語を、定義している。次に「演段」として、弧をつぎつぎに2等分して弦でつなぎ、弦の中点に垂直に立つ線分を、矢と呼称して各矢長を順に求めると述べて、「演段図解」「勾股互換之図」があり、相似（直角）三角形より、径・矢 ＝ 斜巾 であることを証明している。

（図1）



（図2）



円径と原矢から甲矢(二斜矢)を、天元の一と立てて求めている。それを原文通り書いて見る。

立天元之一為甲矢、○ 以與径相減相乗四因之為二斜之面冪、○
寄左、列原矢以径相乗之得數、 與寄左相消得開方式、
開方式
所得開方式、依皈除求商術、命傍書平方開之得甲矢(皈除求商術は別書に委細に書いているが、(書いていないらしい[3]）後学のために記して置くとある。）

寄左式の立て方は、書いてないが、相似三角形から求めたものであろう。皈除求商術は今でいう <ホーナー 法>である。[4]（後に皈除得商除と呼称している。本稿では<ホーナー法>で表現する。）

さて，上記の開方式であるが、原矢から甲矢を求める２次方程式であって、乙矢以下も求めるので、便宜的に、円径をd，矢を h_{i-1} （$i=1,2,3,\cdots;h=h_0$：原矢）として、一般式を立てる。

$$-dh_{i-1}+4dh_i-4h_i^2=0 \qquad (\mathrm{I}^*)$$

Ｉ－２．各矢の式

（I*）式に に i＝1 と置いて 、開方式：

$$-dh+4dh_1-4h_1^2=0 \qquad (\mathrm{I}^*\text{-}1)$$

甲矢（二斜矢）：h_1 を皈除求商術（<ホーナー法>）によって求める。

$$h_1=\frac{h}{4}+\frac{h^2}{16d}+\frac{h^3}{32d^2}+\frac{5h^4}{256d^3}+\frac{7h^5}{512d^4}+\frac{21h^6}{2048d^5}+\frac{33h^7}{4098d^6}+\frac{429h^8}{65536d^7}+\frac{715h^9}{1301072d^8}$$
$$+\frac{2431h^{10}}{524288d^9}+\frac{4199h^{11}}{1048576d^{10}} \qquad (1)$$

第１項を元数、第２項以下を一差、二差、三差、･･･、と呼称している。上式は十差の１１項まで求めているが、規則性を見つけ出せるので、六差位でよいといい、そして、次のように、変形している。（下式。六差位でよいといっているのは、規則性を見い出せるので、変形した下式をいっているのであろう。乙矢を求めるときの下記を参照）

$h_1=A_{10}+A_{11}+A_{12}+\cdots\cdots$ とすると：

$$h_1=\frac{h}{4}+\frac{1}{4}A_{10}\frac{h}{d}+\frac{1}{2}A_{11}\frac{h}{d}+\frac{5}{8}A_{12}\frac{h}{d}+\frac{7}{10}A_{13}\frac{h}{d}+\frac{3}{4}A_{14}\frac{h}{d}+\frac{11}{14}A_{15}\frac{h}{d}-$$

右乗（和数字）
左除（和数字）

$$=\frac{h}{4}+\frac{1}{4}A_{10}+\frac{h}{d}\frac{3}{6}A_{11}\frac{h}{d}+\frac{5}{8}A_{12}\frac{h}{d}+\frac{7}{10}A_{13}\frac{h}{d}+\frac{9}{12}A_{14}\frac{h}{d}+\frac{11}{14}A_{15}\frac{h}{d}-$$

（*A_{1j}に相当するものは書かれていない）[6]

数係数を、一般的に書くと、m差の数係数：

$$\frac{1+2(m-1)}{4+2(m-1)}=\frac{2m-1}{2m+2} \quad [7]$$

（I*）式に i＝2 と 置いて 、開方式：

$$-dh_1+4dh_2-4h_2^2=0 \qquad (\mathrm{I}^*\text{-}2)$$

として、乙矢（2^2斜矢）を求めるのであるが、h_1：甲矢（2斜矢）の十差まで（（1）式）を実としている。かくして求めた h_2：乙矢（2^2斜矢）は

$$h_2=\frac{h}{16}+\frac{5h^2}{256d}+\frac{21h^3}{2048d^2}+\frac{429h^4}{65536d^3}+\frac{2431h^5}{524288d^4}+\frac{29393h^6}{8388608d^5}+\frac{185725h^7}{67108864d^6}$$

$$+\frac{9674845h^{8}}{4294967296d^{7}}+\frac{64822395h^{9}}{34559738368d^{8}}+\frac{383631595h^{10}}{549755813888d^{9}}+\frac{611656755h^{11}}{4393046511104d^{10}} \qquad (2)$$

$h_2=A_{20}+A_{21}+A_{22}+\cdots\cdots$とすると：

$$h_2=\frac{h}{16}+\frac{3\cdot5}{6\cdot8}A_{20}\frac{h}{d}+\frac{7\cdot9}{10\cdot12}A_{21}\frac{h}{d}+\frac{11\cdot13}{14\cdot16}A_{22}\frac{h}{d}+\frac{15\cdot17}{18\cdot20}A_{23}\frac{h}{d}+\frac{19\cdot21}{22\cdot24}A_{24}\frac{h}{d}+\frac{23\cdot25}{26\cdot28}A_{25}\frac{h}{d}$$

とまで、変形している。(ここでは、A_{2j}に相当する元数、一差、二差、•••は書かれていて、左除右乗は共に和数字となっている。もちろん傍書法である。)

ここで、「以原矢直設諸矢」として、各矢の各差を帰納的に求める方法を示している。例えば、例を挙げて、現代式に書くと（（別表）参照）：

乙矢五差：$A_{25}=\frac{a_{25}}{b_{25}}=\frac{4^5a_{15}+2a_{20}a_{24}+1\cdot a_{21}a_{23}+2a_{22}^{2}}{4^{5+1}b_{15}}=\frac{29393h^6}{8388608d^5}$
（2^2斜矢）

丙矢五差：$A_{35}=\frac{a_{35}}{b_{35}}=\frac{4^5a_{25}+2a_{30}a_{34}+1\cdot a_{31}a_{33}+2a_{32}^{2}}{4^{5+1}b_{25}}=\frac{3202465h^6}{34359738368d^5}$
（2^3斜矢）

一般の矢については、次のようになる：

$$(2^n\text{斜矢})：h_n=\frac{1}{4^n}+\frac{4a_{n-1,1}+a_{n0}^{2}}{4^2b_{n-1,1}}+\frac{4^2a_{n-1,2}+a_{n0}a_{n1}}{4^3b_{n-1,2}}+\frac{4^3a_{n-1,3}+4a_{n0}a_{n2}+a_1^{2}}{4^4b_{n-1,3}}$$
$$+\frac{4^4a_{n-1,4}+a_{n0}a_{n3}+2a_{n1}a_{n2}}{4^5b_{n-1,4}}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{4^7a_{n-1,7}+8a_{n0}a_{n6}+4a_{n1}a_{n5}+8a_{n2}a_{n4}+a_{n3}^{2}}{4^8b_{n-1,7}}$$

この方法は七差までで、次に、次の様なことが書いている。「諸矢八差以上ヲ求ル例術ハ。開方開除ノ法ニ随テ。商方相乗シテ実級ニ聚ル所ヲ以テ如前索之ヘキナリ。仍テ八差以上求ル術畧之シテ繁ク不記也。」2段下げて「右ノ術ニ因テ。開方開除ノ労ナク容易諸矢ヲ求ル。尚前例ヲ試ル為丙丁ノ両矢ヲ設ル開方式ヲ顕ス。」とあって、再び<ホーナー法>に戻って、乙矢から丙矢（八斜矢）を求めている。[8)]

（Ⅰ*）に　$i=3$　と置いて、開方式：

$$-dh_2+4dh_3-4h_3^{2}=0 \qquad (\text{I}^*\text{-}3)$$

ここの h_2 には（2）式の 五差までしか代入していない。得た結果も同様である。

Ⅰ－3．汎半背巾の式

「求汎半背巾」の項として、書かれていることを現代風に書き表す。

原矢・径＝二斜面巾　　　二斜面巾・半斜数巾１＝原汎半背巾
甲矢・径＝四斜面巾　　　四斜面巾・半斜数巾４＝甲汎半背巾
乙矢・径＝八斜面巾　　　八斜面巾・半斜数巾１６＝乙汎半背巾
「丙矢以上依前術得各汎半背巾」とある。

かくして、甲矢～癸矢までの１０個の矢に半斜数巾と径：$(2^i)^2dh_i$を掛けて、各汎半背巾の各項（表２）となるのである。

Ⅰ－4．定半背巾の式

「探索元数及諸差極限」の項として 、原数から五差まで、甲～癸までの１０個の分数係数を小数に直している。（（表３））。元数、一、二差は直ちに推察されるが、三、四差は７を掛けると、前者は９が並び、後者は８が並ぶ。といった零約術によって極限が求められるが、五差は ７も９も掛けても、汎背巾の商一十件（*甲～癸）では分からないので、重ねて一十三四件の商を求めて、極限を求めてさだめるべきである。（*けれども）故に五差を用いないで、元数と四差までで諸差の極限を探索する。とある。((表３))

ここで、「細術」の項として極限（*値）をまとめている。（(表３）の下欄に極限値）「元数者各一個ﾅﾙ故真以一個為極限、然者四分之一ナリ、」とある。この項最後に「列原数及、一、二、三、四差如左」 とあって各行毎に

原極数ハ　四分之一　　　　　一差極数　三分之一
二差極数　四十五分之八　　　三差極数　三十五分之四
四差極数　一千五百七十五分之一百二十八

とあって、ここで初めてで、ここだけであるが、「極数」なる呼称が出てくるのである。極限と違うのは原極数だけである。[9)]

ここから＜前編＞の最終段階、定半背巾の式に入る。

「 探索逐除術的例」

元数、一差～四差の各差毎に書いている一連の表現を、和の形で続けて書いて行く。

$(s/2)^2 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ とすると：

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = dh + \frac{1}{3}h^2 + \frac{8}{45}\frac{h^3}{d} + \frac{4}{35}\frac{h^4}{d^2} + \frac{128}{1575}\frac{h^5}{d^3} = dh + \frac{1}{3}\frac{h}{d}B_0 + \frac{24}{45}\frac{h}{d}B_1 + \frac{180}{280}\frac{h}{d}B_2 + \frac{4480}{6300}\frac{h}{d}B_3$$

$$= dh + \frac{1}{3}\frac{h}{d}B_0 + \frac{8}{15}\frac{h}{d}B_1 + \frac{9}{14}\frac{h}{d}B_2 + \frac{32}{45}\frac{h}{d}B_3 = dh + \frac{1}{3}\frac{h}{d}B_0 + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\frac{h}{d}B_1 + \frac{3\cdot3}{2\cdot7}\frac{h}{d}B_2 + \frac{4\cdot8}{5\cdot9}\frac{h}{d}B_3$$

分母•子に奇数番目の差：B_1，B_3 に４を掛け、偶数番目：B_2，B_4 に２を掛けて、

$$= dh + \frac{2\cdot2}{3\cdot4}\frac{h}{d}B_0 + \frac{4\cdot4}{5\cdot6}\frac{h}{d}B_1 + \frac{6\cdot6}{7\cdot8}\frac{h}{d}B_2 + \frac{8\cdot8}{9\cdot10}\frac{h}{d}B_3$$

$$= dh + \frac{2^2}{3\cdot4}\frac{h}{d}B_0 + \frac{4^2}{5\cdot6}\frac{h}{d}B_1 + \frac{6^2}{7\cdot8}\frac{h}{d}B_2 + \frac{8^2}{9\cdot10}\frac{h}{d}B_3$$

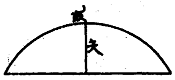
（原文はB_1に相当するものは書かれていない）

これは、「不休綴術」及び「乾坤之巻」の結果と同じである。これを現代風に一般的に書くと：

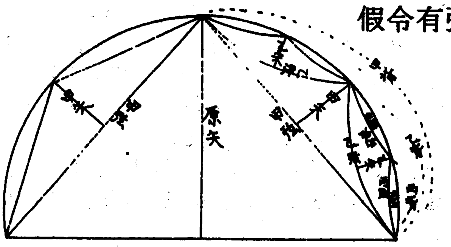
$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = dh + \sum_{m=1} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m+2)} B_{m-1}\frac{h}{d}$$

II．不休撰 ＜後編＞の内容の概要

冒頭は「問」「答云」「術曰」文の形式をとっている。



（図３）



（図４）

假令有弧形矢二寸径一尺問弧若干

答云弧

術曰置径矢相乗四因而得数為原数、乗矢
四因之、以径乗之三除四除而為一差、置一差乗矢
又乗一十六（四ヶ巾）以径除之五除六除而為二差、置二差乗矢
又乗三十六（六ヶ巾）以径除之七除八除而為三差、置三差乗矢
又乗六十四（八ヶ巾）以径除之九除一十除為四差、置四差乗矢
又乗一百（一〇ヶ巾）以径除之一十一除一十二除而為五差、置五差乗矢
又乗一百四十四以径除之一十三除一十四除而為六差、

これを現代式に表すと、次のようになる。

$s^2 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_6$ とすると：

$$s^2 = 4dh + \frac{2^2}{3\cdot4}\frac{h}{d}B_0 + \frac{4^2}{5\cdot6}\frac{h}{d}B_1 + \frac{6^2}{7\cdot8}\frac{h}{d}B_2 + \frac{8^2}{9\cdot10}\frac{h}{d}B_3 + \frac{10^2}{11\cdot12}\frac{h}{d}B_4 + \frac{12^2}{13\cdot14}\frac{h}{d}B_5$$

II－1．各矢の式

次いで、「列所得依前術甲乙丙丁戊ノ矢各商五位如左」の項として、各矢を＜前＞から拾っているのであるが、面白いことに、戊から甲の逆順に５矢の「五位」（*５項。＜前＞では癸までの１０矢の五差（６項。ここでいう「六位」））までを記載している。

II－2．各汎半背巾の式

次いで「列甲矢以圓径乗之得数為乙弦巾則甲汎半背巾也、」[10] なる重要な定義のある項目である。ここは、甲の順序で書いていて「従上逐テ除下乃チ逐テ乗分母以分子除クナリ」とあって、「逐除商」の計算の仕方まで示して、順次「逐除商」の形式を整えているので、その一連の式を続けて記す。

原汎半背巾＝甲弦巾＝（*原矢・径）：

$s_0{}^2 = dh$

$s_i{}^2 = B'_{i0} + B'_{i1} + B'_{i2} + B'_{i3} + B'_{i4}$（$i = 1, 2, \cdots, 5$）とすると：

$$s_1{}^2=\frac{1}{4}dh+\frac{1}{4}B'_{10}\frac{h}{d}+\frac{1}{2}B'_{11}\frac{h}{d}+\frac{5}{8}B'_{12}\frac{h}{d}+\frac{7}{10}B'_{13}\frac{h}{d}$$
$$=\frac{1}{4}dh+\frac{1\cdot3}{3\cdot4}B'_{10}\frac{h}{d}+\frac{3\cdot5}{5\cdot6}B'_{11}\frac{h}{d}+\frac{5\cdot7}{7\cdot8}B'_{12}\frac{h}{d}+\frac{7\cdot9}{9\cdot10}B'_{13}\frac{h}{d}$$

$$s_2{}^2=\frac{1}{16}dh+\frac{5}{16}B'_{20}\frac{h}{d}+\frac{21}{5\cdot8}B'_{21}\frac{h}{d}+\frac{429}{21\cdot32}B'_{22}\frac{h}{d}+\frac{2431}{8\cdot429}B'_{23}\frac{h}{d}$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}dh+\frac{3\cdot5}{3\cdot4}B'_{20}\frac{h}{d}+\frac{7\cdot9}{5\cdot6}B'_{21}\frac{h}{d}+\frac{11\cdot13}{7\cdot8}B'_{22}\frac{h}{d}+\frac{15\cdot17}{9\cdot10}B'_{23}\frac{h}{d}\right\}$$

$$s_3{}^2=\frac{1}{64}dh+\frac{21}{64}B'_{30}\frac{h}{d}+\frac{357}{21\cdot32}B'_{31}\frac{h}{d}+\frac{29325}{128\cdot357}B'_{32}\frac{h}{d}+\frac{666655}{32\cdot29325}B'_{33}\frac{h}{d}$$
$$=\frac{1}{16}\left\{\frac{1}{4}dh+\frac{7\cdot9}{3\cdot4}B'_{30}\frac{h}{d}+\frac{15\cdot17}{5\cdot6}B'_{31}\frac{h}{d}+\frac{23\cdot25}{7\cdot8}B'_{32}\frac{h}{d}+\frac{31\cdot33}{9\cdot10}B'_{33}\frac{h}{d}\right\}$$

$$s_4{}^2=\frac{1}{256}dh+\frac{85}{256}B'_{40}\frac{h}{d}+\frac{5797}{128\cdot85}B'_{41}\frac{h}{d}+\frac{1907231}{512\cdot5797}B'_{42}\frac{h}{d}+\frac{173556383}{128\cdot1907213}B'_{43}\frac{h}{d}$$
$$=\frac{1}{64}\left\{\frac{1}{4}dh+\frac{15\cdot17}{3\cdot4}B'_{40}\frac{h}{d}+\frac{31\cdot33}{5\cdot6}B'_{41}\frac{h}{d}+\frac{47\cdot49}{7\cdot8}B'_{42}\frac{h}{d}+\frac{63\cdot65}{9\cdot10}B'_{43}\frac{h}{d}\right\}$$

$$s_5{}^2=\frac{1}{1024}dh+\frac{341}{1024}B'_{50}\frac{h}{d}+\frac{93093}{512\cdot341}B'_{51}\frac{h}{d}+\frac{12550285}{2048\cdot93093}B'_{52}\frac{h}{d}+\frac{44616473759}{512\cdot122550285}B'_{53}\frac{h}{d}$$
$$=\frac{1}{256}\left\{\frac{1}{4}dh+\frac{31\cdot33}{3\cdot4}B'_{50}\frac{h}{d}+\frac{63\cdot65}{5\cdot6}B'_{51}\frac{h}{d}+\frac{95\cdot97}{7\cdot8}B'_{52}\frac{h}{d}+\frac{127\cdot129}{9\cdot10}B'_{53}\frac{h}{d}\right\}$$ [11]

この結果をまとめたのが、（表１）である。これ以降の己～癸までが、（表２）である。（原表は甲から癸までの１０個の汎半背巾を一つの表にまとめている。）[12]

Ⅱ－３．定背巾の式

「探索各分子極限」の項として、ここの （表１，２）の汎半背巾は、＜前編＞（表２）のと違い、きれいな形に変形しているので、差の分母 ３・４，５・６，７・８，・・・，１１・１２ を残して、その上の分子を前の分母で割って小数に直すと、うまい具合に小数点以下が９が並び、直ちに極限が推察される。それを、原数も併せて、つぎのような表現となっている。

「依前述得各分子極限、故列一差二差三差四差五差各去分子各認分子極限
原数者又認極限四分之一得数之図如左」

（表１，２）及び冒頭に挙げた図からも分かる様に、明らかに原数は零に近づくものである。こうして、＜後編＞ 最後に、甲 ～ 癸の１０個の汎半背巾[13]の原、一 ～ 五差にわたって全く同じものが書きつづられている。それをここでは、一まとめに書いて置く。

＜後＞ （表４）

	原 B'_0	一差 B'_1	二差 B'_2	三差 B'_3	四差 B'_4	五差 B'_5
甲 ～ 癸 汎半背巾	$\frac{1}{4}h$	$\frac{4}{3\cdot4}B'_0\frac{h}{d}$	$\frac{16}{5\cdot6}B'_1\frac{h}{d}$	$\frac{36}{7\cdot8}B'_2\frac{h}{d}$	$\frac{64}{9\cdot10}B'_3\frac{h}{d}$	$\frac{100}{11\cdot12}B'_4\frac{h}{d}$

（B'_1に相当するものは、書かれていない。）

これで、『円理綴術』つまり、不休撰の＜後編＞は終わって、巻尾誌語が来るが、これを、和として、一つの式に表すと、次のように：

$(s／4)^2=B_0'+B_1'+B_2'+\cdot\cdot\cdot+B_5'$ としなくてはならなくなり、

$$\left(\frac{s}{4}\right)^2=\frac{1}{4}h+\frac{4}{3\cdot4}B'_0\frac{h}{d}+\frac{16}{5\cdot6}B'_1\frac{h}{d}+\frac{36}{7\cdot8}B'_2\frac{h}{d}+\frac{64}{9\cdot10}B'_3\frac{h}{d}+\frac{100}{11\cdot12}B'_4\frac{h}{d}$$

$s^2=B_0+B_1+B_2+\cdot\cdot\cdot+B_6$ とすれば、Ⅱ章（＜後＞）冒頭の式は、これを１６倍して：

$$s^2=4dh+\frac{2^2}{3\cdot4}B_0\frac{h}{d}+\frac{4^2}{5\cdot6}B_1\frac{h}{d}+\frac{6^2}{7\cdot8}B_2\frac{h}{d}+\frac{8^2}{9\cdot10}B_3\frac{h}{d}+\frac{10^2}{11\cdot12}B_4\frac{h}{d}+\frac{12^2}{13\cdot14}B_5\frac{h}{d}$$

となるのである。

Ⅲ. 兼庭撰 ＜前編＞ の内容の概要

Ⅲ－1. 開方式

文頭題名は、不休撰が兼庭撰に変わっただけで、三十六方位盤の朱印の一丁後に同じく「円理弧背術 名旧縦術 今井 兼庭撰 剰明之印 」となって、説明が不休撰より省略されているが、解法の方針を、次のように示している。

弧背術者、弧形之内容數萬斜、依勾股互換術、互換術者、古所謂乗除法也、各求矢以円径與一十六相乗、而弧背ハ次第取二分之一、故半斜數巾不及乗ナリ、各汎背巾トシ、諸差ノ極限ヲ探會シ、定背巾ヲ得テ、諸差ノ例ヲ探索シテ設本術、

次に同じく「演段」があり、「図解」と「勾股互換之図」がある。[14) 以下の径・矢＝斜巾の証明は全く同じ。[15) 開方式は、四約すると断って、Ⅰ章とは、次のように変わっている。これをⅠ章と同じく表して行く。

$$-(1/4)\,d h_{i-1}+d h_i-h_i^2=0 \qquad (\text{Ⅲ}^*)$$

Ⅲ－2. 各矢の式

解法は、「皈除求商術」の呼称が抜けているだけで、「命傍書如常平方開之得甲矢、如左」とあって、Ⅰ章より省略し、整頓されて書かれている。同様にして、

$$-(1/4)\,d h+d h_1-h_1^2=0 \qquad (\text{Ⅲ}^*\text{-}1)$$

これより、甲矢(二斜矢)：h_1 は（兼庭撰では、すべて和数字で書かれ、初項から一商、二商，三商、・・・ と呼称している。）

$$h_1=\frac{1\cdot h}{4}+\frac{1\cdot h^2}{16d}+\frac{1\cdot h^3}{32d^2}+\frac{5h^4}{256d^3}+\frac{7h^5}{512d^4}$$

「探索甲矢ノ商的例」とあって、沢山項を求めなくてもよい。四五件でよいとして、「逐而以前商逐除後商而得数」とあって、不休の「逐除商」の形にしている。

$h_1=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}+A_{15}$ とすると：

$$h_1=\frac{1\cdot h}{4}+\frac{1}{4}\,\frac{h}{d}A_{11}+\frac{3}{6}\,\frac{h}{d}A_{12}+\frac{5}{8}\,\frac{h}{d}A_{13}+\frac{7}{10}\,\frac{h}{d}A_{14}\qquad \begin{matrix}\text{右乗}\\ \text{左乗}\end{matrix}$$

これを見ると、二商より右者は１，３，５，７ と奇数、左者は４，６，８，１０ と偶数、そこで右、左に順に、３，５，７，９ を掛けて、甲矢率(各率も、A_{1j}を除いたもの)と呼称する：

$$h_1=\frac{1\cdot h}{4}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4}\,\frac{h}{d}A_{11}+\frac{3\cdot 5}{5\cdot 6}\,\frac{h}{d}A_{12}+\frac{5\cdot 7}{7\cdot 8}\,\frac{h}{d}A_{13}+\frac{7\cdot 9}{9\cdot 10}\,\frac{h}{d}A_{14}\qquad ：\text{甲矢率}$$

（一率）　（二率）　（三率）　（四率）

更に、A_{1j}を具体的に代入して元に戻す：

$$h_1=\frac{1\cdot h}{4}+\frac{1\cdot 3\,h^2}{48\,d}+\frac{45\,h^3}{1440\,d^2}+\frac{1575\,h^4}{80640\,d^3}+\frac{99225\,h^5}{7251600\,d^4}$$

次に、乙矢(四斜)を求めるのであるが、「術曰、立天元一為乙矢・・・・・・」として、この度の開方式は、四約した（Ⅲ*）にではなく （Ⅰ*）の i に２を代入した開方式となっている。

$$-d h_1+4\,d h_2-4\,h_2^2=0 \qquad (\text{Ⅲ}^*\text{-}2)$$

この開方式は（Ⅰ*-２)と同じで、甲弧のh_1に、元に戻したすぐ上の五商までの上式を代入して実としているが、しかし、その下方に、(Ⅲ*-1)と同様に、廉級の四個で、実方廉三級を約して「如常平方開之得乙矢、如左、」とあって、同じ大きさ、同じ書体で、やや薄めであるが、「此式四約スル故ヘ実級者甲矢四分之一也、方級者円径也、廉級一個也、」と重ねて、断っている。こうして、商欄に五商までの解が書かれていて、「右所得一、二、三、四、五商、相併為乙矢、」とあり(つまり(Ⅲ*) 式の i に 2 を代入した形に戻っている) 、乙矢から続く後矢の求め方を説明している。この求め方は、帰納的な方法で、Ⅰ章の帰納的方法とは異なり、単純明快になっている。[16)

Ⅲ－3. 各汎背巾の式

（１）「求各汎背巾」

「右所得見甲、乙、丙、丁、戊ノ矢、以て原矢求甲矢、以甲矢求乙矢、・・・、以丁矢求戊矢也、置甲、乙、丙、丁、戊ノ矢、以圓径與一十六相乗之、得原甲、乙、丙、丁、戊汎背巾、」

これを現代風に書くと、次の様になるが、下端に小文字で、各弧の定義があるので、大事なので、つけ加えておく。

原汎背巾＝甲矢・１６・径 ： $s_0^2=16\,d h_1$

甲 ～ ＝乙矢・１６・径 ： $s_1^2=16\,d h_2$ 「原弧取二分之一甲弧トス」

　　乙　〜　＝丙矢・１６・径　：　$s_2^2=16dh_3$　　「甲弧取二分之一乙弧トス」　　（☆）
　　丙　〜　＝丁矢・１６・径　：　$s_3^2=16dh_4$　　「乙弧取二分之一丙弧トス」
　　丁　〜　＝戊矢・１６・径　：　$s_4^2=16dh_5$　　「丙弧取二分之一丁弧トス」

最後に、「原甲、乙、丙、丁之汎背者、次第取二分之一ヲ其次々汎背トス、故ニ求其巾數者、以一十六為率、委細依圖可知之、」[17]（表２）

（２）「探索原甲乙丙丁ノ汎背巾ノ例」

ここで、不休撰の呼称する「逐除商」の形をとる。「・・・・・・逐而以前商逐而除後商而得數列左」とあるのが、（表３）である。

（３）「探索各一商及各分母子例」

出来上がった汎背巾（表３）の各分母子の数について、分析を試み、規則性を捕らえている。先ず、分母(*一商）について、

原汎背巾の分母＝甲矢率の分母（*＝４）、甲 〜 の分母＝原 〜・４、
乙　〜　＝原汎背巾・１６　、丙　〜　＝原 〜・６４
丁　〜　＝原　〜　・２５６

「原、甲、乙、丙、丁 ノ 分母逐四因ナルコトヲ探會ス」（*分母の二商以降については、言及していない。）

ついで、分子について、

原汎背巾の分子＝甲矢率の分子（*＝１）

甲、乙、〜 丁汎背巾の分子の二商以降は、（表３）の数値を（表４）のように、２数の奇数の積に変換していて、最後に「原甲乙丙丁ノ 分子各奇数相乗ナルコトヲ探會ス、」と、二商以降を締めくくっているが、一商については、次のようにある。

「各一商者、原甲乙丙丁共逐而四分之一ヲ取ル數也、故各一商之分母ヲ四トス、」とあって、不休撰＜後＞（表２）の原欄の下記と同じことを言っている。かくして（表４）となるのである。[18]

（４）「探索分母子 ノ 例」

さて、いよいよ汎背巾の極限を求めるのであるが、Ｉ、Ⅱ章にない計算技術の優れた方法をとっているので、ここで、表にしておく。

（表４）の各商毎に共通な分母：3•4, 5•6, 7•8, 9•10 を除外した分母子を考える。[19)]

（別表）　［林 913］

	二商	三商	四商	五商
原汎背巾（2⁰斜）	$1\cdot3=2^2-1$	$3\cdot5=4^2-1$	$5\cdot7=6^2-1$	$7\cdot9=8^2-1$
甲 〜（2¹斜）	$\frac{3\cdot5}{4}=\frac{4^2-1}{4}=2^2-\frac{1}{4}$	$\frac{7\cdot9}{4}=\frac{8^2-1}{4}=4^2-\frac{1}{4}$	$\frac{11\cdot13}{4}=\frac{12^2-1}{4}=6^2-\frac{1}{4}$	$\frac{15\cdot17}{4}=\frac{16^2-1}{4}=8^2-\frac{1}{4}$
乙 〜（2²斜）	$\frac{7\cdot9}{16}=\frac{8^2-1}{16}=2^2-\frac{1}{16}$	$\frac{15\cdot17}{16}=\frac{16^2-1}{16}=4^2-\frac{1}{16}$	$\frac{23\cdot25}{16}=\frac{24^2-1}{16}=6^2-\frac{1}{16}$	$\frac{31\cdot33}{16}=\frac{32^2-1}{16}=8^2-\frac{1}{16}$
丙 〜（2³斜）	$\frac{15\cdot17}{64}=\frac{16^2-1}{64}=2^2-\frac{1}{64}$	$\frac{31\cdot33}{64}=\frac{32^2-1}{64}=4^2-\frac{1}{64}$	$\frac{47\cdot49}{64}=\frac{48^2-1}{64}=6^2-\frac{1}{64}$	$\frac{63\cdot65}{64}=\frac{64^2-1}{64}=8^2-\frac{1}{64}$
丁 〜（2⁴斜）	$\frac{31\cdot33}{256}=\frac{32^2-1}{256}=2^2-\frac{1}{256}$	$\frac{63\cdot65}{256}=\frac{64^2-1}{256}=4^2-\frac{1}{256}$	$\frac{95\cdot97}{256}=\frac{96^2-1}{256}=6^2-\frac{1}{256}$	$\frac{127\cdot129}{256}=\frac{128^2-1}{256}=8^2-\frac{1}{256}$

一般に 2^i斜汎背巾　j　商の係数（$j\geqq2$）＝ $\{2(j-1)\}^2-1/2^{2i}\rightarrow\{2(j-1)\}^2$　（$i\rightarrow\infty$

これから、定背巾を得るのであるが、それが（表　５）で、汎背巾の各商に同じものが、書かれているが、汎背巾の順序が逆になっており、対応した矢も書いているので、Ⅱ章（表４）のように一まとめにせず、そのまま書いた。[20)]

$$\text{結局}:\ s^2=4dh+\frac{2^2}{3\cdot4}B_1\frac{h}{d}+\frac{4^2}{5\cdot6}B_2\frac{h}{d}+\frac{6^2}{7\cdot8}B_3\frac{h}{d}+\frac{8^2}{9\cdot10}B_4\frac{h}{d}+\frac{10^2}{11\cdot12}B_5\frac{h}{d}+\frac{12^2}{13\cdot14}B_6\frac{h}{d}$$

$$+\frac{14^2}{15\cdot16}B_7\frac{h}{d}+\frac{16^2}{17\cdot18}B_8\frac{h}{d}\qquad(B_m\text{のmはm商のm})$$

$$\text{一般に、}\quad s^2=4dh+\sum_{m=2}\frac{(2m-2)^2}{(2m-1)(2m+1)}B_{m-1}\frac{h}{d}$$

Ⅳ．結語

不休撰を仮に分けた、＜前編＞と＜後編＞とは、基本的な考え方の違いがあるのではないか。それは、人の違いから来るのか、それとも他の理由から来るのか。(妄想を逞くすると、ひょっとして本多が＜前＞＜後＞を一冊にまとめてしまったかとも？）ということのご批評を仰ぎたく、兼庭撰の＜前編＞も併せ、それらの内容の概要を３章にわたって述べ、兼庭撰の＜前編＞は不休撰の＜後編＞の系列に入り、不休撰の＜前編＞との違いは、（図４）の甲、乙、丙背、・・・（兼庭撰では、甲、乙、丙弧、・・・）のとり方にあり、特に、兼庭撰では、Ⅲ節 冒頭 Ⅲ-１． 開方式の項における解法の方針を説明している原文（小文字）の所で、何も斜数巾を乗じなくてもよい、とまでうたっている。各弧のとり方は、Ⅲ-３．項（☆）にも明記されている。

不休撰の＜前編＞の汎半背巾は、各矢に円径を掛け、それに半斜数巾を掛けたものであり、＜後編＞は（図４）の各矢にただ単に円径を掛け、原数を１／４（Ⅱ－３項の原文）として、その後、定背巾にしたものであり、兼庭撰のは矢に円径を掛け、更に１６倍したものであって、それがため、背が一つ上がった定背巾である。(表にはそれに対応した矢が記入されている）。従って、兼庭撰の定背巾は、不休撰の＜後編＞の系列に入ると言える。理解し難いが、後の２者の原数、一商のとり方が、彼らなりの拠り所があるように思える。

それに関することであるが、不休撰＜前編＞Ｉ-４項の「細術」における元数の極限である。その最初には「元数者各一個ﾅﾙ故真以一個為極限、然者四分之一ﾅﾘ、」。そうしてこの項最後に「原極数ﾊ四分之一ﾅﾘ、」。「極数」の呼称は、初めて出てくるものであり、他の一、二、三、四差の極数は、極限と同じ値である。この原極数の１／４ が何を意味するものか。不休撰＜後編＞（表２）の原欄の下方に「原数者逐四除故以四分之一為極限」）とある（ 注１２））が、これは、明らかに間違った考えの下にあるが、これが賢弘の書いたものであるのかどうか、迷う所なのである。＜前編＞は半背巾、＜後編＞は定背巾の展開式の違いはあり、＜後編＞は、Ⅱ節 の当初のように問題形式の形をとっている。

計算技術は、不休撰の＜後編＞は＜前編＞より計算の優れていることもあって、極限をとる零約術等は遥に単純明快になっており、兼庭撰のは更に本文（別表）のような極限を求める計算は、特に近代的なにおいのするものと言えるのではなかろうか。賢弘の先駆的創造に対して、後人は計算の向上はあって然るべきであろう。

あるいは、不審に思う所を重点に検討して、ご批判を仰げば良かったかと思いもしたのですが、全体像を掴めなくては作者の違いも分からない、と思案した結果の事であります。

幾多の和算研究の先覚者が指摘しなかった事を、ここに記す事は、大変に、怖じけさせますが、若し筆者のミスであれば、ご寛恕のほどを冀うものであります。

注）

１）文中、参考文献は文献中の［番号］で指示する。$\boxed{\text{利明之印}}$ の朱印は右書き縦書きの二段になっている。利明独自の三十六（三十二？）方位盤の朱印が、文頭題名の一丁前に半丁上部を使って押されている。兼庭撰にも、全く同じ両印が押されている。

２）[2]も巻首誌語が本文に書かれていない。これは別紙にかかれた紙片が貼付され、これには「建部先生ノ製作也」と改行して改めて付け加えてある。尚、巻尾誌語は何故か記載されていない。[1]も含めて、これら周辺の事は、［11］p.318~319を参照されたい。

３）[11]p.321参照。

４）＜ホーナー（William George Horner英 1786~1837)法＞（1819年に発表）は数係数の高次方程式の近似解法であるが、関孝和は、『古今算法記』（澤口一之著）([11]第一巻p348では寛文11(1671)、[12]p91では寛文十年の書とある)で用いられている中国から渡った方法を、更に発展させている。ここでは文字係数に適用した解法である。

５）極めて丁寧に書かれている。初めてのことで大変な苦労だったと思われる。その解法の部分及び（表１）まで、傍書式に書かれた左側（乗数）の分子の部分は算木式数字で書かれている。

６）（*　　　）は筆者の書き入れであって、それと分かる場合、書き入れないこともある。

７）この後五差まで、元数、各差毎にA_i'に相当するものが、文章として書かれている。

８）「以原矢直設諸矢」の方法は完全には一般化出来ない。各差の甲が分かれば乙以下右ならえでよいのであろうが、それも七差までの話であるという。兼庭になると、これが一般化されている。(注16）参照）

９）ただここで分からないのは、「元数者各一個ﾅﾙ故真以一個為極限、然者四分之一ﾅﾘ、」とある「然者」以下である。本稿の不休＜後編＞、兼庭＜前編＞（不休では元数、兼庭では一商）の何れも何かの理由によってか １／４ にひっかかりがあるように見える。この２者の論旨は何れも間違っているけれども、（Ⅳ．結語参照）ここでいう極数は何かを意味しているように思える。

１０）この定義は、＜後編＞の（図 ４）を見れば、＜前編＞の汎半背巾とは全く異なる定義となっていることは、明らかであろう。多少の違いこそあれ、基本的には兼庭撰も同系統のものである。

１１）傍書法では、括弧で括るということが出来ないから、ここでは手数を省くためと見やすくするために、｛ ｝で括った。実際は分配した形になって、一つ一つ元数、各差に書き加えている。

１２）（表２）の「原」の下欄に「原数者逐四除故以四分之一為極限」とある。Ⅱ－３項の原文も参照。

１３）「汎半背巾」と「汎」がついていることに注意。＜前＞の汎半背巾の原が異なっている。

１４）Ⅱ．節 当初の（図４）はないが、以下の文章で、甲背、乙背、丙背、・・・は、甲弧、乙弧、丙弧、・・・となっている。汎半背巾の作り方が、違っていて、前者は単に円径を、後者は円径に更に１６倍していることである。そうすると背が一つ上がった定背になる。それにしても小文字で「半背巾不用乗」と明記してあるのは何故か。「逐除商」の形は初項（ここ兼庭では「一商」と呼称している）が、違っても二商以下の形が変わらないので、一商だけ確実に分かっていれば事足りるということであろうか。然し論理的ではない。その後Ｉ．節 不休撰と同じく「演段」の２字はないが「図解」と「勾股互換之図」がある。この互換之図の下にやや小さめの字で、不休の言わんとする所を付け加えている。「小勾股形与大勾股形同矩也故矢与径相乗成斜巾是以此通用圓内容圭形及三斜形勾股形之矩合適等無非」。[10] にも記載されている。
１５）以下も、Ｉ章 不休撰＜前編＞（Ｉ*）式を四約した開方式（Ⅲ*）式を使った形で展開している。
１６）（表１）の下方に一商A_{11}～五商A_{15}と各矢を商毎に一般化して書いておいた。
$h_i=2^i$斜矢$=A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{i5}$（ｉ＝１，２，３，４，５；甲、乙、・・・、戊矢）である。
（表１）そのものは、各商の数値を表した原本にある表で、２ケ所の数字の脱落と１ケ所のミスが見られたが訂正しておいた。
１７）（☆）式を含めてＩ章の不休撰＜前編＞の各（汎）背の定義が明らかに異なることが分かるであろう。これは不休撰の＜後編＞と同系統のものである。汎背巾の違いは、ここでは１６倍しているので、汎背巾は一つずつ繰り上がっている。（ 注１４）参照）
１８）（表２）の「十六」（表３）の一商についての「十六」が、他の数字と並びが悪かったり、薄かったり、付け足したような、何となく整一斎を欠いているようであるが、それ程、問題にすることはなかろう。
１９）Ⅱ章　不休撰＜後編＞の（表３）の極限を求める分母子に相当する。（Ⅱ－３．定背巾の式の最初の部分参照）。今で言えば、単純な計算であるが、奇麗な求め方である。
２０）ここに問題になるのが、一商の　４ｄｈ　である。（Ⅱ－３項も同じ）極めてあいまいである。甲、乙、・・・の各弧が順に１／２ をとることを考えると、当然零でなくてはならない。「従上商而除下商」（逐除商）の形式は、一商のみ異なっても二商以降（因数として、前商が掛かるが、原本の表は除いている。）は同じものになるのであり、極めて残念な手法と言うより、どうして、これでよいと断っているのだろうか。（建部賢弘は晩年になって、この手法をとったのであろうか）。疑問は、尽きない。

参考文献

［１］表題名『圓理弧背綴術』内題名「圓理弧背綴術解全」文頭題名 圓理弧背術 紹驗 建不休先生撰 $\boxed{\text{利明之印}}$（本多利明筆写）（林文庫９１１）（別紙の筆写は「文化五年」(1808)とある）.
［２］表題名『圓理綴術』建部不休撰 内題名「圓理綴術」文頭題名 圓理弧背術 紹驗 建不休先生撰（*巻尾識語なし）（狩野文庫１９９２９・１・９０６４）
［３］表題名『不休建部賢弘撰 圓理綴術 圓理弧背術 完』内題名「一本題円理弧背綴術」文頭題名 圓理弧背術 建不休先生撰（三上義夫筆写）「円理綴術の後に書す」の末尾に「明治四十(*1907)年十月七日 三上義夫しるす」とある。（岡本文庫・写７０・１６９９３）
［４］表題名『圓理綴術全』内題名「圓理綴術」文頭題名 圓理弧背術 紹驗 建不休先生撰（遠藤利貞筆写）（学士院０８３８）
［５］表題名『圓理綴術全』内題名「圓理綴術」文頭題名 圓理弧背術 建不休先生撰（*［４］の遠藤が巻首識語に付け足したコメントも含めたままの筆写）（林文庫９１２）
［６］表題名『圓理弧背術 紹驗』文頭題名 圓理弧背術 紹驗 建不休先生撰（学士院０７９４）
［７］表題名『圓理弧背術 又云円理綴術(*後から付け足しのようで、筆跡も異なるよう。)』文頭題名 圓理弧背術 紹驗 建不休先生撰（学士院０７９５）
［８］表題名『圓理弧背術 写本上巻・下巻』内題名 圓理弧背術 上巻・下巻 文頭題名 圓理弧背術（国会図書館３０２・２・２５０）
［９］表題名『圓理弧背綴術』兼庭撰 文頭題名 圓理弧背術 紹驗 今井兼庭撰 $\boxed{\text{利明之印}}$（林文庫９１３）
［１０］表題名『圓理綴術全』文頭題名 圓理弧背術 紹驗 今井兼庭撰（学士院０８３９）
［１１］表題名『明治前 日本数学史 第二巻』日本学士院 日本科学史刊行会編集 補訂(大矢真一・下平和夫・平山諦)1983(昭和58)年 付き 1994(*平成6)年 岩波書店
［１２］表題名『増修日本数学史 遠藤利貞遺著 三上義夫編 平山諦補訂 昭和56(*1981)年 恒星社厚生閣
［１３］表題名『史学雑誌 第四十一編 第七號・第十號・第十一號・第十二號』題名「円理の発明に関する論證－日本数学史上の難問題－」(一、二、三、四完) 昭和5(*1930)年 史学会

本稿所載に関連ある和算家及び和算研究家を思いつくまま、その生存年を示しておく。（和算家は[12]による）

関　孝和	1640(寛永17)?～1708(宝永5)	遠藤　利貞	1843(天保14)～1915(大正4)
中根元圭	1662(寛文2)～1733(享保18)	菊地　大麓	1855(安政2)～1917(大正6)
建部賢弘	1664(寛文4)～1739(元文4)	岡本　則録	1847(弘化4)～1931(昭和6)
松永良弼	?～1744(延享1)	林　鶴一	1873(明治6)～1935(昭和10)
久留島義太	?～1757(宝暦7)	藤原松三郎	1881(明治14)～1946(昭和21)
今井兼庭	1718(享保3)～1780(安永9)	三上　義夫	1875(明治8)～1950(昭和25)
本多利明	1743(寛保3)～1820(文政3)	小倉金之助	1885(明治18)～1962(昭和37)

<前>（表 1） 圓理弧背綴術 不休撰 [林911]

2^i斜矢 h_i	元数 $A_{i,0}$	一差 $A_{i,1}$	二差 $A_{i,2}$	三差 $A_{i,3}$	四差 $A_{i,4}$	五差 $A_{i,5}$
原矢（弦矢）h_0（i=0）	h					
甲矢（二斜矢） h_1 （i=1）	$\frac{h}{4}$	$\frac{h^2}{16d}$	$\frac{h^3}{32d^2}$	$\frac{5h^4}{256d^3}$	$\frac{7h^5}{512d^4}$	$\frac{21h^6}{2048d^5}$
乙矢（四斜矢） h_2 （i=2）	$\frac{h}{16}$	$\frac{5h^2}{256d}$	$\frac{21h^3}{2048d^2}$	$\frac{429h^4}{65536d^3}$	$\frac{2431h^5}{524288d^4}$	$\frac{29393h^6}{8388608d^5}$
丙矢（八斜矢） h_3 （i=3）	$\frac{h}{64}$	$\frac{21h^2}{4096d}$	$\frac{357h^3}{131072d^2}$	$\frac{29325h^4}{16777216d^3}$	$\frac{666655h^5}{536870912d^4}$	$\frac{32302465h^6}{34359738368d^5}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
癸矢（一千〇二十四斜矢） h_{10} （i=10）	:	:	:	:	:	:

上表の分子即ち、原文では、傍書法の右側（右乗）の数字は算木式で表している。<後>の表を含めて、算木式で表しているのは、本稿で断っている個所を含めてここまでである。（数値にかなりのミスが見られる）

$A_{i,j}=a_{i,j}/b_{i,j}$ （i，j＝0，1，2，3，4，5）とする．$A_{0,0}$ は原矢の元数 h である。

<前>（表 2） 圓理弧背綴術 不休撰 [林911]

汎半背巾 $(s_i/2)^2$	元数 $B_{i,0}$	一差 $B_{i,1}$	二差 $B_{i,2}$	三差 $B_{i,3}$	四差 $B_{i,4}$	五差 $B_{i,5}$
原 〃 $(s_0/2)^2$ （i=0）	dh					
甲 〃 $(s_1/2)^2$ （i=1）	dh	$\frac{h^2}{4}$	$\frac{h^3}{8d}$	$\frac{5h^4}{64d^2}$	$\frac{7h^5}{128d^3}$	$\frac{21h^6}{512d^4}$
乙 〃 $(s_2/2)^2$ （i=2）	dh	$\frac{5h^2}{16}$	$\frac{21h^3}{128d}$	$\frac{429h^4}{4096d^2}$	$\frac{3431h^5}{32768d^3}$	$\frac{29393h^6}{524288d^4}$
丙 〃 $(s_3/2)^2$ （i=3）	dh	$\frac{21h^2}{64}$	$\frac{357h^3}{2048d}$	$\frac{29325h^4}{262144d^2}$	$\frac{666655h^5}{8388608d^3}$	$\frac{32302465h^6}{536870912d^4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
癸 〃 $(s_{10}/2)^2$ （i=10）	:	:	:	:	:	:

ここに、各汎半背巾：$(s_i/2)^2$の各元数，各差

＝{（前表 1）の（各元数，各差）}・$(2^i)^2dh_i=4^idh_i$（i＝0，1，2，・・・，10；h_0＝h）

$B_{i,j}=c_{i,j}/d_{i,j}$（i＝0，1，2 ・・・，10；j＝0，1，2・・・，5）とする。$B_{i,0}$は原矢の元数 dh である。

<前>（表 3） 圓理弧背綴術 不休撰 [林911]

各商 f_i	元数 $f_{i,0}$	一差 $f_{i,1}$	二差 $f_{i,2}$	三差 $f_{i,3}$	四差 $f_{i,4}$	五差 $f_{i,5}$
原商 f_0（i=0）	1					
甲商 f_1（i=1）	1	0.25	0.125	0.078125	0.0546875	0.041015652
乙商 f_2（i=2）	1	0.3125	0.1640625	0.104736328125	0.07418823242187	0.0560626983864257812余
丙商 f_3（i=3）	1	0.328125	0.17431640625	0.1118659973144余	0.0794714689254760余	0.060168029740452余
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
壬商 f_9（i=9）	1	0.333320617675余	0.1777769300679210余	0.1142851208890086余	0.08126939992200余	0.0615498668833312余
癸商 f_{10}（i=10）	1	0.33333301544189余	0.17777756805019233余	0.1142855659364166余	0.081269730932573余	0.061550124694524余
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
極限：	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{128}{1575}$	?

〈後〉（表 1） 圓理弧背綴術　不休術　[林911]

諸約矢冪 $(a_i/2)^2$	原 $B'_{i,0}$	一差 $B'_{i,1}$	二差 $B'_{i,2}$	三差 $B'_{i,3}$	四差 $B'_{i,4}$	五差 $B'_{i,5}$	
甲$(a_1/2)^2$ (i=1)	$\frac{dh}{4}$	$\frac{1\cdot3}{3\cdot4}B'_{1,0}\frac{h}{d}$	$\frac{3\cdot5}{5\cdot6}B'_{1,1}\frac{h}{d}$	$\frac{5\cdot7}{7\cdot8}B'_{1,2}\frac{h}{d}$	$\frac{7\cdot9}{9\cdot10}B'_{1,3}\frac{h}{d}$	$\frac{9\cdot11}{11\cdot12}B'_{1,4}\frac{h}{d}$	甲矢・径＝乙弦巾
乙$(a_2/2)^2$ (i=2)	$\boxed{\frac{1}{4}\frac{dh}{4}}$ $\frac{dh}{16}$	$\frac{1}{4}\frac{3\cdot5}{3\cdot4}B'_{2,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4}\frac{7\cdot9}{5\cdot6}B'_{2,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4}\frac{11\cdot13}{7\cdot8}B'_{2,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4}\frac{15\cdot17}{9\cdot10}B'_{2,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4}\frac{19\cdot21}{11\cdot12}B'_{2,4}\frac{h}{d}$	乙矢・径＝丙弦巾
丙$(a_3/2)^2$ (i=3)	$\boxed{\frac{1}{16}\frac{dh}{4}}$ $\frac{dh}{64}$	$\frac{1}{16}\frac{7\cdot9}{3\cdot4}B'_{3,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16}\frac{15\cdot17}{5\cdot6}B'_{3,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16}\frac{23\cdot25}{7\cdot8}B'_{3,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16}\frac{31\cdot33}{9\cdot10}B'_{3,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16}\frac{39\cdot41}{11\cdot12}B'_{3,4}\frac{h}{d}$	丙矢・径＝丁弦巾
丁$(a_4/2)^2$ (i=4)	$\boxed{\frac{1}{64}\frac{dh}{4}}$ $\frac{dh}{256}$	$\frac{1}{64}\frac{15\cdot17}{3\cdot4}B'_{4,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{64}\frac{31\cdot33}{5\cdot6}B'_{4,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{64}\frac{47\cdot49}{7\cdot8}B'_{4,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{64}\frac{63\cdot65}{9\cdot10}B'_{4,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{64}\frac{79\cdot81}{11\cdot12}B'_{4,4}\frac{h}{d}$	丁矢・径＝戊弦巾
戊$(a_5/2)^2$ (i=5)	$\boxed{\frac{1}{256}\frac{dh}{4}}$ $\frac{dh}{1024}$	$\frac{1}{256}\frac{31\cdot33}{3\cdot4}B'_{5,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{256}\frac{63\cdot65}{5\cdot6}B'_{5,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{256}\frac{95\cdot97}{7\cdot8}B'_{5,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{256}\frac{127\cdot129}{9\cdot10}B'_{5,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{256}\frac{159\cdot161}{11\cdot12}B'_{5,4}\frac{h}{d}$	戊矢・径＝己弦巾

この表の下欄に書いている（術文）ことを、現代式に一般的な形で書くと次のようになる。（各斜の原、一～四差としての $B'_{i,j}$ は原表にはない。）

原：　分母　4^{i-1}
一差：　分子　$1+2+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots+2\cdot2^{i-2}=1+2(1+2+2^2+\cdots+2^{i-2})=1+2(2^{i-1}-1)$
　　　　$3+2(2^{i-1}-1)$
　　分母　$3\cdot4,\ 4^{i-1}$
二差：　分子　$3+4+4\cdot2+4\cdot2^2+\cdots+4\cdot2^{i-2}=3+4(1+2+2^2+\cdots+2^{i-2})=3+4(2^{i-1}-1)$
　　　　$5+4(2^{i-1}-1)$
　　分母　$5\cdot6,\ 4^{i-1}$
三差：　分子　$5+6+6\cdot2+6\cdot2^2+\cdots+6\cdot2^{i-2}=5+6(1+2+2^2+\cdots+2^{i-2})=5+6(2^{i-1}-1)$
　　　　$7+6(2^{i-1}-1)$
　　分母　$7\cdot8,\ 4^{i-1}$
四差　分子　$7+8+8\cdot2+8\cdot2^2+\cdots+8\cdot2^{i-2}=7+8(1+2+2^2+\cdots+2^{i-2})=7+8(2^{i-1}-1)$
　　　　$9+8(2^{i-1}-1)$
　　分母　$9\cdot10,\ 4^{i-1}$
五差　分子　$9+10+10\cdot2+10\cdot2^2+\cdots10\cdot2^{i-2}=9+10(1+2+2^2+\cdots+2^{i-2})=9+10(2^{i-1}-1)$
　　　　$11+10(2^{i-1}-1)$
　　分母　$11\cdot12,\ 4^{i-1}$

$B'_{i,j}=c'_{i,j}/d'_{i,j}$　($i=1,2,3,4,5,\ j=0,1,2,3,4,5$) とする。

〈後〉（表 2） 圓理弧背綴術　不休術　[林911]

諸約矢冪 $(a_i/2)^2$	原 $B'_{i,0}$	一差 $B'_{i,1}$	二差 $B'_{i,2}$	三差 $B'_{i,3}$	四差 $B'_{i,4}$	五差 $B'_{i,5}$	
己$(a_6/2)^2$ (i=6)	$\frac{dh}{4096}$	$\frac{1}{1024}\frac{63\cdot65}{3\cdot4}B'_{6,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{1024}\frac{127\cdot129}{5\cdot6}B'_{6,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{1024}\frac{191\cdot193}{7\cdot8}B'_{6,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{1024}\frac{255\cdot257}{9\cdot10}B'_{6,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{1024}\frac{319\cdot321}{11\cdot12}B'_{6,4}\frac{h}{d}$	己・径＝庚弦巾
庚$(a_7/2)^2$ (i=7)	$\frac{dh}{16384}$	$\frac{1}{4096}\frac{127\cdot129}{3\cdot4}B'_{7,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4096}\frac{255\cdot257}{5\cdot6}B'_{7,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4096}\frac{383\cdot385}{7\cdot8}B'_{7,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4096}\frac{511\cdot513}{9\cdot10}B'_{7,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4096}\frac{639\cdot641}{11\cdot12}B'_{7,4}\frac{h}{d}$	庚・径＝辛弦巾
辛$(a_8/2)^2$ (i=8)	$\frac{dh}{65536}$	$\frac{1}{16384}\frac{255\cdot257}{3\cdot4}B'_{8,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16384}\frac{511\cdot513}{5\cdot6}B'_{8,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16384}\frac{767\cdot769}{7\cdot8}B'_{8,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16384}\frac{1023\cdot1025}{9\cdot10}B'_{8,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16384}\frac{1279\cdot1281}{11\cdot12}B'_{8,4}\frac{h}{d}$	辛・径＝壬弦巾
壬$(a_9/2)^2$ (i=9)	$\frac{dh}{262144}$	$\frac{1}{65536}\frac{511\cdot513}{3\cdot4}B'_{9,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{65536}\frac{1023\cdot1025}{5\cdot6}B'_{9,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{65536}\frac{1535\cdot1537}{7\cdot8}B'_{9,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{65536}\frac{2047\cdot2049}{9\cdot10}B'_{9,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{65536}\frac{2559\cdot2561}{11\cdot12}B'_{9,10}\frac{h}{d}$	壬・径＝癸弦巾
癸$(a_{10}/2)^2$ (i=10)	$\frac{dh}{1048576}$	$\frac{1}{262144}\frac{1023\cdot1025}{3\cdot4}B'_{10,0}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{262144}\frac{2047\cdot2049}{5\cdot6}B'_{10,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{262144}\frac{3071\cdot3073}{7\cdot8}B'_{10,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{262144}\frac{4095\cdot4097}{9\cdot10}B'_{10,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{262144}\frac{5119\cdot512}{11\cdot12}B'_{10,4}\frac{h}{d}$	癸・径＝子弦巾

└ この欄外下に「原数者逐四除故以四分之一為極限」とある。

$B'_{i,j}=c'_{i,j}/d'_{i,j}$　($i=6,7,8,9,10;\ j=0,1,2,3,4,5$) とする。

（各斜の原、一、二、三、四差、五差 としての $B'_{i,j}$ は 原表には書いていない。）

〈後〉（表 3） 圓理弧背綴術　不休術　[林911]

諸約矢冪 $(a_i/2)^2$	原 $B''_{i,0}$	一差 $B''_{i,1}$	二差 $B''_{i,2}$	三差 $B''_{i,3}$	四差 $B''_{i,4}$	五差 $B''_{i,5}$	
甲$(a_1/2)^2$ (i=1)	0.25dh	$\frac{3}{3\cdot4}B''_{1,0}\frac{h}{d}$	$\frac{15}{5\cdot6}B''_{1,1}\frac{h}{d}$	$\frac{35}{7\cdot8}B''_{1,2}\frac{h}{d}$	$\frac{63}{9\cdot10}B''_{1,3}\frac{h}{d}$	$\frac{99}{11\cdot12}B''_{1,4}\frac{h}{d}$	(∴乙弦巾)
乙$(a_2/2)^2$ (i=2)	0.0625dh	$\frac{3.75}{3\cdot4}B''_{2,0}\frac{h}{d}$	$\frac{15.75}{5\cdot6}B''_{2,1}\frac{h}{d}$	$\frac{35.75}{7\cdot8}B''_{2,2}\frac{h}{d}$	$\frac{63.75}{9\cdot10}B''_{2,3}\frac{h}{d}$	$\frac{99.75}{11\cdot12}B''_{2,4}\frac{h}{d}$	(∴丙弦巾)
丙$(a_3/2)^2$ (i=3)	0.015625dh	$\frac{3.9375}{3\cdot4}B''_{3,0}\frac{h}{d}$	$\frac{15.937}{5\cdot6}B''_{3,1}\frac{h}{d}$	$\frac{35.9375}{7\cdot8}B''_{3,2}\frac{h}{d}$	$\frac{63.9375}{9\cdot10}B''_{3,3}\frac{h}{d}$	$\frac{99.9375}{11\cdot12}B''_{3,4}\frac{h}{d}$	(∴丁弦巾)
・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	・・・	
辛$(a_8/2)^2$ (i=8)	0.0000152587890625dh	$\frac{3.99993896484375}{3\cdot4}B''_{8,0}\frac{h}{d}$	$\frac{15.99993896484375}{5\cdot6}B''_{8,1}\frac{h}{d}$	$\frac{35.99993896484375}{7\cdot8}B''_{8,2}\frac{h}{d}$	$\frac{63.99993896484375}{9\cdot10}B''_{8,3}\frac{h}{d}$	$\frac{99.99993896484375}{11\cdot12}B''_{8,4}\frac{h}{d}$	(∴壬弦巾)
壬$(a_9/2)^2$ (i=9)	0.000003814697265625dh	$\frac{3.9999847412109375}{3\cdot4}B''_{9,0}\frac{h}{d}$	$\frac{15.9999847412109375}{5\cdot6}B''_{9,1}\frac{h}{d}$	$\frac{35.9999847412109375}{7\cdot8}B''_{9,2}\frac{h}{d}$	$\frac{63.9999847412109375}{9\cdot10}B''_{9,3}\frac{h}{d}$	$\frac{99.9999847412109375}{11\cdot12}B''_{9,4}\frac{h}{d}$	(∴癸弦巾)
癸$(a_{10}/2)^2$ (i=10)	0.00000095367431640625dh	$\frac{3.999996185302734375}{3\cdot4}B''_{10,0}\frac{h}{d}$	$\frac{15.999996185302734375}{5\cdot6}B''_{10,1}\frac{h}{d}$	$\frac{35.999996185302734375}{7\cdot8}B''_{10,2}\frac{h}{d}$	$\frac{63.999996185302734375}{9\cdot10}B''_{10,3}\frac{h}{d}$	$\frac{99.999996185302734375}{11\cdot12}B''_{10,4}\frac{h}{d}$	(∴子弦巾)
		↓	↓	↓	↓	↓	
		$\frac{4}{3\cdot4}$	$\frac{16}{5\cdot6}$	$\frac{36}{7\cdot8}$	$\frac{64}{9\cdot10}$	$\frac{100}{11\cdot12}$	

$B''_{i,j}=c''_{i,j}/d''_{i,j}$　($i=1,2,3,\cdots,8,9,10;\ j=0,1,2,3,4,5$) とする。（各斜の原、一～五差としての $B''_{i,j}$ は書いていない。）

<前>（表 1） 圓理弧背綴術 兼庭撰 ［林９１３］

一商 $A_{i,1}$	二商 $A_{i,2}$	三商 $A_{i,3}$	四商 $A_{i,4}$	五商 $A_{i,5}$	2^i斜矢 hi
$\frac{h}{4}$	$\frac{3h^2}{48d}$	$\frac{45h^3}{1440d^2}$	$\frac{1575h^4}{80640d^3}$	$\frac{99225h^5}{7257600d^4}$	甲矢（二斜矢） h_1 (i=1)
$\frac{h}{16}$	$\frac{15h^2}{768d}$	$\frac{945h^3}{92160d^2}$	$\frac{135135h^4}{20643840d^3}$	$\frac{34459425h^5}{7431782400d^4}$	乙矢（四斜矢） h_2 (i=2)
$\frac{h}{64}$	$\frac{63h^2}{12288d}$	$\frac{16065h^3}{5898240d^2}$	$\frac{9237375h^4}{5284823040d^3}$	$\frac{9449834625h^5}{7610145177600d^4}$	丙矢（八斜矢） h_3 (i=3)
$\frac{h}{256}$	$\frac{255h^2}{196608d}$	$\frac{260865h^3}{377487360d^2}$	$\frac{600772095h^4}{1352914698240d^3}$	$\frac{2460161729025h^5}{7792788661862400d^4}$	丁矢（十六斜矢） h_4 (i=4)
$\frac{h}{1024}$	$\frac{1023h^2}{3145728d}$	$\frac{4189185h^3}{24159191024d^2}$	$\frac{38603339775h^4}{346346162749440d^3}$	$\frac{6324385155338825h^5}{797981558974617600d^4}$	戊矢（三十二斜矢）h_5 (i=5)

ここに、$A_{i,j}= a_{i,j} / b_{i,j}$ (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)

ところで、ここで甲矢から乙矢を求める方法を帰納的に求め、戊矢まで拡張している。「依前術求諸矢開除功甚繁多也。以更幽探求乙矢開方式中以甲矢直四斜以上矢求。自然例有率ヲ探会セリ。[illegible]、・・・・・・・。左所述術可見会。」とある。

（甲矢を傍書式に記して後、その後の矢の求め方を説明しながら戊矢まで求めて、以上のように、一つの表としてまとめている。また、その後 <前> 不休撰のように、再び <ホーナー法> で求めず、これらの求めた各斜の矢をそのまま利用して話をすすめている。）以下にその求める式を示して置く。

一商 ：$A_{n1}= (1/4) A_{n-1,1}= (1/4)(h/4^{n-1}) = h/4^n$

二商 ：$A_{n2}= (1/4) A_{n-1,2} = A_{n1}^2/d$

三商 ：$A_{n3}= (1/4) A_{n-1,3}+A_{n2}^2 (A_{n1}/2) /d$

四商 ：$A_{n4}= (1/4) A_{n-1,4}+ \{A_{n2}^2+A_{n3} (A_{n1}/2)\} /d$

五商 ：$A_{n5}= (1/4) A_{n-1,5}+ \{A_{n3} (A_{n2}/2) +A_{n4} (A_{n1}/2)\} /d$ （n = 2, 3, 4, 5）

<前>（表 2） 圓理弧背綴術 兼庭撰 ［林９１３］

汎背巾 s_i^2	商 $B_{i,1}$	商 $B_{i,2}$	商 $B_{i,3}$	商 $B_{i,4}$	商 $B_{i,5}$	
原 〃 s_0^2 (i=0)	$\frac{dh\cdot16}{4}$	$\frac{3h^2\cdot16}{48}$	$\frac{45h^3\cdot16}{1440d}$	$\frac{1575h^4\cdot16}{80640d^2}$	$\frac{99225h^5\cdot16}{7257600d^3}$	甲矢
甲 〃 s_1^2 (i=1)	$\frac{dh\cdot16}{16}$	$\frac{15h^2\cdot16}{768}$	$\frac{945h^3\cdot16}{92160d}$	$\frac{135135h^4\cdot16}{20643840d^2}$	$\frac{34459425h^5\cdot16}{7431782400d^3}$	乙矢
乙 〃 s_2^2 (i=2)	$\frac{dh\cdot16}{64}$	$\frac{63h^2\cdot16}{12288}$	$\frac{16065h^3\cdot16}{5898240d}$	$\frac{9237375h^4\cdot16}{5284823040d^2}$	$\frac{9449834625h^5\cdot16}{7610145177600d^3}$	丙矢
丙 〃 s_3^2 (i=3)	$\frac{dh\cdot16}{256}$	$\frac{255h^2\cdot16}{196608}$	$\frac{260865h^3\cdot16}{377487360d}$	$\frac{600772095h^4\cdot16}{1352914698240d^2}$	$\frac{2460161729025h^5\cdot16}{7792788661862400d^3}$	丁矢
丁 〃 s_4^2 (i=4)	$\frac{dh\cdot16}{1024}$	$\frac{1023h^2\cdot16}{3145728}$	$\frac{4189185h^3\cdot16}{24159191024d}$	$\frac{38603339775h^4\cdot16}{346346162749440d^2}$	$\frac{6324385155338825h^5\cdot16}{797981558974617600d^3}$	戊矢

ここに、各汎背巾 ： s_{i-1}^2 の各商 ＝ {（前表１）の 各矢}・１６ｄ （i = 1, 2, 3, 4, 5）

各商 ： $B_{i,j}= c_{i,j}/d_{i,j}$ （i, j = 1, 2, 3, 4, 5）

<前>（表 3） 圓理弧背綴術 兼庭撰 ［林９１３］

（以前商遅除後商） s_i^2	一商 $B'_{i,1}$	二商 $B'_{i,2}$	三商 $B'_{i,3}$	四商 $B'_{i,4}$	五商 $B'_{i,5}$	
原汎背巾 s_0^2 (i=0)	$\frac{dh\cdot16}{4}$	$\frac{3}{12}B'_{0,1}\frac{h}{d}$	$\frac{15}{30}B'_{0,2}\frac{h}{d}$	$\frac{35}{56}B'_{0,3}\frac{h}{d}$	$\frac{63}{90}B'_{0,4}\frac{h}{d}$	甲矢
甲 〃 s_1^2 (i=1)	$\frac{dh\cdot16}{16}$	$\frac{15}{48}B'_{1,1}\frac{h}{d}$	$\frac{63}{120}B'_{1,2}\frac{h}{d}$	$\frac{143}{224}B'_{1,3}\frac{h}{d}$	$\frac{255}{350}B'_{1,4}\frac{h}{d}$	乙矢
乙 〃 s_2^2 (i=2)	$\frac{dh\cdot16}{64}$	$\frac{63}{192}B'_{2,1}\frac{h}{d}$	$\frac{255}{480}B'_{2,2}\frac{h}{d}$	$\frac{575}{896}B'_{2,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1023}{1440}B'_{2,4}\frac{h}{d}$	丙矢
丙 〃 s_3^2 (i=3)	$\frac{dh\cdot16}{256}$	$\frac{255}{768}B'_{3,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1023}{1920}B'_{3,2}\frac{h}{d}$	$\frac{2303}{3584}B'_{3,3}\frac{h}{d}$	$\frac{4095}{5760}B'_{3,4}\frac{h}{d}$	丁矢
丁 〃 s_4^2 (i=4)	$\frac{dh\cdot16}{1024}$	$\frac{1023}{3072}B'_{4,1}\frac{h}{d}$	$\frac{4095}{7080}B'_{4,2}\frac{h}{d}$	$\frac{9215}{14336}B'_{4,3}\frac{h}{d}$	$\frac{16383}{23040}B'_{4,4}\frac{h}{d}$	戊矢

ここに、 $B'_{i,j}= c'_{i,j} / d'_{i,j}$ （i = 0, 1, 2, 3, 4 ; j = 1, 2, 3, 4, 5）

（各斜汎背巾における二商 〜 五商、ここでは $B'_{i,j}$ は原表には書かれていない。）

<前>（表 4） 圓理弧背綴術 兼庭撰 ［林913］

([illegible]) s_i^2	一商 $B'_{i,1}$	二商 $B'_{i,2}$	三商 $B'_{i,3}$	四商 $B'_{i,4}$	五商 $B'_{i,5}$		
原汎背巾 s_0^2 (i=0)	4dh	$\frac{1\cdot3}{3\cdot4}B'_{0,1}\frac{h}{d}$	$\frac{3\cdot5}{5\cdot6}B'_{0,2}\frac{h}{d}$	$\frac{5\cdot7}{7\cdot8}B'_{0,3}\frac{h}{d}$	$\frac{7\cdot9}{9\cdot10}B'_{0,4}\frac{h}{d}$	[illegible]	甲矢
甲 〃 s_1^2 (i=1)	4dh	$\frac{1}{4}\frac{3\cdot5}{3\cdot4}B'_{1,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4}\frac{7\cdot9}{5\cdot6}B'_{1,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4}\frac{11\cdot13}{7\cdot8}B'_{1,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{4}\frac{15\cdot17}{9\cdot10}B'_{1,4}\frac{h}{d}$	[illegible]	乙矢
乙 〃 s_2^2 (i=2)	4dh	$\frac{1}{16}\frac{7\cdot9}{3\cdot4}B'_{2,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16}\frac{15\cdot17}{5\cdot6}B'_{2,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16}\frac{23\cdot25}{7\cdot8}B'_{2,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{16}\frac{31\cdot33}{9\cdot10}B'_{2,4}\frac{h}{d}$	[illegible]	丙矢
丙 〃 s_3^2 (i=3)	4dh	$\frac{1}{64}\frac{15\cdot17}{3\cdot4}B'_{3,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{64}\frac{31\cdot33}{5\cdot6}B'_{3,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{64}\frac{47\cdot49}{7\cdot8}B'_{3,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{64}\frac{63\cdot65}{9\cdot10}B'_{3,4}\frac{h}{d}$	[illegible]	丁矢
丁 〃 s_4^2 (i=4)	4dh	$\frac{1}{256}\frac{31\cdot33}{3\cdot4}B'_{4,1}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{256}\frac{63\cdot65}{5\cdot6}B'_{4,2}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{256}\frac{95\cdot97}{7\cdot8}B'_{4,3}\frac{h}{d}$	$\frac{1}{256}\frac{127\cdot129}{9\cdot10}B'_{4,4}\frac{h}{d}$	[illegible]	戊矢

右端の分子とは、各汎背巾の一商の係数 4 から始まる2数の積（甲汎背巾以降の二商の最初の因数 1 － 原表には記載されていない形になっている－除く）で、例えば 原で言えば、4, 1•3, 3•5, 5•7, 7•9、甲で言えば、4, 3•5, 7•9, 11•13, 15•17、乙以降は、一商の係数 4 を除き、例えば、乙で言えば、7•9, 15•17, 23•25, 31•33 等である。（［院0339］の遠藤の写本は、すべて 4 から始まっている。）分母は二商から五商までの最初の因数 4, 16, 64, 256 を指す

また、一商について、次のように述べている。

「各一商者、原甲乙丙丁共逐而四分之一ヲ取ル数也、故各一商之分母ヲ四トス、」

ここに、 $B'_{i,j}=c'_{i,j}/d'_{i,j}$, $B'_{i,1}=4dh$（i＝0, 1, 2, 3, 4 ; j＝1, 2, 3, 4, 5）（各斜汎背巾における二商 ～ 五商 : $B'_{i,j}$ は原表には書かれていない。）

<前>（表 5） 圓理弧背綴術 兼庭撰 ［林913］

([illegible]) s_i^2		丁汎背巾 s_4^2	丙汎背巾 s_3^2	乙汎背巾 s_2^2	甲汎背巾 s_1^2	原汎背巾 s_0^2
一ノ商 B_1	[illegible]	4dh	4dh	4dh	4dh	4dh
二ノ商 B_2	[illegible]	$\frac{4}{3\cdot4}B_1\frac{h}{d}$	$\frac{4}{3\cdot4}B_1\frac{h}{d}$	$\frac{4}{3\cdot4}B_1\frac{h}{d}$	$\frac{4}{3\cdot4}B_1\frac{h}{d}$	$\frac{4}{3\cdot4}B_1\frac{h}{d}$
三ノ商 B_3	[illegible]	$\frac{16}{5\cdot6}B_2\frac{h}{d}$	$\frac{16}{5\cdot6}B_2\frac{h}{d}$	$\frac{16}{5\cdot6}B_2\frac{h}{d}$	$\frac{16}{5\cdot6}B_2\frac{h}{d}$	$\frac{16}{5\cdot6}B_2\frac{h}{d}$
四ノ商 B_4	[illegible]	$\frac{36}{7\cdot8}B_3\frac{h}{d}$	$\frac{36}{7\cdot8}B_3\frac{h}{d}$	$\frac{36}{7\cdot8}B_3\frac{h}{d}$	$\frac{36}{7\cdot8}B_3\frac{h}{d}$	$\frac{36}{7\cdot8}B_3\frac{h}{d}$
五ノ商 B_5	[illegible]	$\frac{64}{9\cdot10}B_4\frac{h}{d}$	$\frac{64}{9\cdot10}B_4\frac{h}{d}$	$\frac{64}{9\cdot10}B_4\frac{h}{d}$	$\frac{64}{9\cdot10}B_4\frac{h}{d}$	$\frac{64}{9\cdot10}B_4\frac{h}{d}$
		戊矢	丁矢	丙矢	乙矢	甲矢

ここに、$B_i=c_i/d_i$ （i＝2, 3, 4, 5）, $B_1=4dh$ （各斜汎背巾におけるにおける二ノ商 ～ 五ノ商 : B_i は、原表には書かれていない。）

乗率（c_iの係数） 2^2 4^2 6^2 8^2 10^2 12^2 14^2 16^2 ･･･

除率（d_iの係数） 3・4 5・6 7・8 9・10 11・12 13・14 15・16 17・18 ･･･

<前>（別表） 「以原矢直求弧背矢 [illegible]」 円理弧背綴術 [illegible]撰 ［林911］

$A_{i,j}$		0数 $A_{i0}=\frac{a_{i0}}{b_{i0}}$	一差 $A_{i1}=\frac{a_{i1}}{b_{i1}}$	二差 $A_{i2}=\frac{a_{i2}}{b_{i2}}$	三差 $A_{i3}=\frac{a_{i3}}{b_{i3}}$	四差 $A_{i4}=\frac{a_{i4}}{b_{i4}}$	五差 $A_{i5}=\frac{a_{i5}}{b_{i5}}$	六差 $A_{i6}=\frac{a_{i6}}{b_{i6}}$	七差 $A_{i7}=\frac{a_{i7}}{b_{i7}}$
2^1斜矢(甲): h_1	i=1	$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{4}A_{10}\frac{h}{d}=\frac{1}{4}\frac{h}{4}\frac{h}{d}=\frac{h^2}{4^2d}=\frac{h^2}{16d}$	[illegible] $=\frac{h^3}{2^5d^2}=\frac{h^3}{32d^2}$	[illegible] $=\frac{5h^4}{4^4d^3}=\frac{5h^4}{256d^3}$	[illegible] $=\frac{7h^5}{512d^4}$	[illegible] $=\frac{21h^6}{2^{11}d^5}=\frac{21h^6}{2048d^5}$	[illegible] $=\frac{33h^7}{4^6d^6}=\frac{33h^7}{4096d^6}$	[illegible] $=\frac{429h^8}{65536d^7}$
2^2斜矢(乙): h_2	i=2	$\frac{h}{4^2}=\frac{h}{16}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2^3斜矢(丙): h_3	i=3	$\frac{h}{4^3}=\frac{h}{64}$	[illegible] $=\frac{21h^2}{4096d}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2^n斜矢: h_n	i=n	$\frac{h}{4^n}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]